Вычислим один интеграл, он в нам дальнейшем неоднократно понадобится.

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha^2 x^2 + 2\beta x}\, dx$$

Где α>0 (иначе интеграл не сойдётся).

Идея: свести к известному интегралу

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} dz = \sqrt{\pi}$$

Выделяем полный квадрат:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha^2 x^2 + 2\beta x}\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\alpha x)^2 + 2\cdot \alpha x \cdot \frac{\beta}{\alpha} - \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2} dx \cdot \exp\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 =$$

$$= \exp\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\alpha x - \frac{\beta}{\alpha}\right) dx = \exp\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 \cdot \frac{1}{\alpha} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} dz}_{\sqrt{\pi}} = \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha} \exp\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2$$

Этот интеграл нам потребуется.

Задача теплопроводности напряжений:

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t), & x \in R,\ t \in [0; +\infty) \\ u|_{t=0} = \varphi(x) \end{cases}$$

Проблема: мы решаем задачу в бесконечной области, где у нас никак СФ не ищутся.

Выводится следующая готовая формула:

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\varepsilon)\, G(x,\varepsilon,t)\, d\varepsilon + \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} f(\varepsilon,\tau)\, G(x,\varepsilon,t-\tau)\, d\varepsilon\, d\tau$$

Где

$$\boxed{G(x,\xi,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}}.}$$

- функция Грина задачи теплопроводности.

Таким образом, задача сводится к подсчёту интегралов.

Пример.

$$\begin{cases} u_t = \frac{1}{4} u_{xx} \\ u|_{t=0} = e^{2x-x^2} \end{cases}$$

Решение — тупо поставить в формулу и посчитать интегралы

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\varepsilon - \varepsilon^2} \frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-\varepsilon)^2}{t}} d\varepsilon$$

Будет даже только 1 слагаемое, т.к. диф ур не содержит неоднородности $f(x,t)$.

Преобразуем интеграл, дабы привести его к табличному.

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(2\varepsilon - \varepsilon^2 - \frac{x^2}{t^2} + \frac{2x\varepsilon}{t} - \frac{\varepsilon^2}{t^2}\right) d\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{t^2}} \cdot$$

$$\cdot \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\varepsilon^2 \underbrace{\left(1+\frac{1}{t^2}\right)}_{\alpha^2} + 2\varepsilon \underbrace{\left(1+\frac{x}{t}\right)}_{\beta}\right) d\varepsilon = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{1+\frac{1}{t^2}}} \exp\left(\frac{1+\frac{x}{t}}{\sqrt{1+\frac{1}{t^2}}}\right)^2 =$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{1+\frac{1}{t^2}}} \exp\left(\frac{\left(1+\frac{x}{t}\right)^2}{1+\frac{1}{t^2}}\right)$$

Пример 2.

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + \underbrace{\sin t}_{f(x,t)} \\ u|_{t=0} = \underbrace{e^{-x^2}}_{\varphi(x)} \end{cases}$$

Опять применяем формулу. На этот раз будет уже 2 слагаемых.

$$u(x,t) = \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\varepsilon^2} e^{-\frac{(x-\varepsilon)^2}{4t}} d\varepsilon}_{I_1} + \int_0^t \sin\tau \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi(t-\tau)}} \underbrace{e^{-\frac{(x-\varepsilon)^2}{4(t-\tau)}} d\varepsilon}_{I_2} dt$$

Приступаем к подсчёту интегралов.

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\varepsilon^2 \frac{4t+1}{4t} + \varepsilon \frac{2x}{4t} - \frac{x^2}{4t}\right) d\varepsilon = e^{-\frac{x^2}{4t}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-(\alpha\varepsilon)^2 + 2\beta\varepsilon\right) d\varepsilon,$$

где $\alpha = \sqrt{\frac{4t+1}{4t}}$, $\beta = \frac{x}{4t}$

Это табличный интеграл.

$$I_1 = e^{-\frac{x^2}{4t}} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\frac{4t+1}{4t}}} \exp\left(\frac{x/4t}{\sqrt{\frac{4t+1}{4t}}}\right)^2 = e^{-\frac{x^2}{4t}} \sqrt{\frac{4t}{4t+1}} \sqrt{\pi}.$$

$$\exp\left(\frac{x^2/(4t)^2}{(4t+1)/(4t)}\right) = e^{-\frac{x^2}{4t}} \sqrt{\frac{4t}{4t+1}} \sqrt{\pi} \cdot e^{\frac{x^2 \cdot 4t}{4t+1}}$$

Теперь считаем второе слагаемое.

$I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\varepsilon)^2}{4(t-\tau)}} d\varepsilon$. Он тоже табличный, но тут мы можем сразу сделать замену $z = \frac{x-\varepsilon}{\sqrt{4(t-\tau)}}$. Получим

$$I_2 = \sqrt{4(t-\tau)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} dz = \sqrt{4\pi(t-\tau)}$$

Тогда 2 слагаемое будет равно

$$\int_0^t \sin\tau \cdot \frac{1}{2\sqrt{\pi(t-\tau)}} \sqrt{4\pi(t-\tau)}\, d\tau = \int_0^t \frac{\sin\tau}{\sqrt{t-\tau}} d\tau,$$ вроде не берется

А что делать, если у нас не прямая, а $\mathbb{R}^2$ или $\mathbb{R}^3$?

Есть лемма, по которой

$$\begin{cases} u_t(M,t) = a^2 \Delta u(M,t) + f(M,t) \\ u|_{t=0}(M) = \varphi(M) \end{cases}$$

если $f(M,t)$ и $\varphi(M)$ представимы как

$$f(M,t) = f_1(x,t) f_2(y,t) f_3(z,t)$$

$$\varphi(M) = \varphi(x)\varphi(y)\varphi(z)$$

То мы можем решить 3 задачи

$$\begin{cases} u^1_t(x,t) = a^2 u^1_{xx}(x,t) + f_1(x,t) \\ u^1|_{t=0} = \varphi_1(x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} u^2_t(y,t) = a^2 u^2_{yy}(y,t) + f_2(y,t) \\ u^2|_{t=0} = \varphi_2(y) \end{cases}$$

$$\begin{cases} u^3_t(z,t) = a^2 u^3_{zz}(z,t) + f_3(z,t) \\ u^3|_{t=0} = \varphi_3(z) \end{cases}$$

и решением исходной задачи будет

$$u = u_1(x,t) u_2(y,t) u_3(y,t).$$

В двумерном случае всё аналогично: $f(M,t)$ должна представляться как $f_1(x,t) f_2(y,t)$, $\varphi(M) = \varphi_1(x)\varphi_2(y)$.

Тогда $u = u_1(x,t) u_2(y,t)$

Но что делать, если $f(M,t)$ или $\varphi(M)$ не удаётся представить в виде такого произведения? Нужно решать другим способом.

В этом случае вводят функцию G

$$G(x,\xi,y,\eta,t) = \left(\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\right)^2 e^{-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}{4a^2t}}$$

В двумерном случае и

$$G(x,\xi,y,\eta,z,\zeta,t) = \left(\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\right)^3 e^{-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}{4a^2t}}$$

В трёхмерном случае.

Тогда в двумерном случае решение запишется как

$$u(x,y,t) = \\ = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi,\eta)G(x,\xi,y,\eta,t)\,d\xi\,d\eta + \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi,\eta,\tau)G(x,\xi,y,\eta,t-\tau)\,d\xi\,d\eta,$$

А в трёхмерном

$$u(x,y,z,t) = \\ = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi,\eta,\zeta)G(x,\xi,y,\eta,z,\zeta,t)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta + \\ + \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi,\eta,\zeta,\tau)G(x,\xi,y,\eta,z,\zeta,t-\tau)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta$$

В глобальном смысле всё то же – подставить и вычислить ужасные интегралы. И тут самое время для мема

В Колыбасовой не разобраны никакие примеры на эту тему. Буткарёв разобрал один, но я не успел записать. Надеюсь, потом я какой-нибудь пример решения задачи теплопроводности на R2 или R3 сюда вставлю.

Решим задачу теплопроводности, но уже на луче.
Это серьёзно всё усложняет. У нас появляется одна граничная точка – x=0. Вы видите слова «граничная»? Как вы понимаете, упускать возможность поставить там ГУ нельзя. Задача ставится так:

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t) & [x>0] \\ u|_{t=0} = \varphi(x) & НУ \\ \alpha u_x + \beta u|_{x=0} = \mu(t) & ГУ \end{cases}$$

По сравнению с задачей на прямой у нас теперь x неотрицателен, но зато добавились ГУ в нуле с функцией μ(t).

На прямой у нас была готовая формула

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) G(x,\xi,t)\, d\xi + \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi,\tau) G(x,\xi,t-\tau)\, d\xi$$

А есть ли готовая формула для луча? Конечно. Только их три будет: для ГУ Дирихле, Неймана и 3-го рода.
Для ГУ 1 рода

$$u(x,t) = \int_0^{+\infty} \varphi(\xi) G_1(x,\xi,t)\, d\xi + \int_0^t d\tau \int_0^{+\infty} f(\xi,\tau) G_1(x,\xi,t-\tau)\, d\xi +$$

$$+ a^2 \int_0^t \mu(\tau) \left.\frac{\partial G_1(x,\xi,t-\tau)}{\partial \xi}\right|_{\xi=0} d\tau$$

Какие отличия от случая прямой?

Во-первых, пределы изменились от –бесконечности до +бесконечности на от 0 до +бесконечности (что абсолютно логично, т.к. именно там происходит всё действие и только там определены функции f(,) и φ()).

Во-вторых, вместо G(,,) теперь G_1(,,), которая выражается через G(,,) как

$$G_1(x,\xi,t) = G(x,\xi,t) - G(x,-\xi,t)$$

Вспомнив, что

$$G(x,\xi,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}}$$

Можем записать

$$G_1(x,\xi,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} - \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2 t}},$$

В-третьих, появилось третье слагаемое в честь новой функции μ(t). Можно считать, что решение представляется в виде суммы трёх функций: первая пытается

удовлетворить дифуру с f(,) при однородных ГУ и НУ, вторая и третья удовлетворяют дифуру без f(,), но вторая «отвечает» за ГУ, а третья за НУ.
Если какие-то из f(x,t), φ(x) и μ(t) зануляются, то зануляются соответствующие интегралы.

В случае ГУ Неймана

$$u(x,t) = \int_0^{+\infty} \varphi(\xi) G_2(x,\xi,t)\, d\xi + \int_0^t d\tau \int_0^{+\infty} f(\xi,\tau) G_2(x,\xi,t-\tau)\, d\xi - a^2 \int_0^t \nu(\tau) G_2(x,0,t-\tau)\, d\tau$$

Где

$$G_2(x,\xi,t) = G(x,\xi,t) + G(x,-\xi,t)$$

То есть

$$G_2(x,\xi,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} + \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2 t}}$$

Ну а что будет в случае ГУ 3-го рода? Тут у меня есть формула только в случае μ(τ)=0, т.е. однородных ГУ:

$$u(x,t) = \int_0^{+\infty} \varphi(\xi) G_3(x,\xi,t)\, d\xi + \int_0^t d\tau \int_0^{+\infty} f(\xi,\tau) G_3(x,\xi,t-\tau)\, d\xi$$

Где

$$G_3(x,\xi,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \left(e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} + e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2 t}} - 2h \int_0^{\infty} e^{-\frac{(x+\xi+z)}{4a^2 t} - hz}\, dz \right)$$